Ordini di calcolo

Luca Tagliavini

February 24-25, 2021

Contents

0.1 Modello di calcolo

Immaginiamo di avere una macchina *a registri* con le seguenti caratteristiche:

- La macchina ha n locazioni di memoria, indicizzate da 1 a n
- L'accesso in lettura/scrittura richiede sempre *tempo costante*
- La macchina ha accesso a operazioni base come somma/moltiplicazione che vengono eseguite in *tempo constante*

0.2 Costo computazionale

Indichiamo con $f(n)$ la quantita' di risorse (tempo, memoria) necessaria al fine dell'esecuzione di un algoritmo con un input n, operante sulla macchina a registri sopra descritta.

Siamo interessati a studiare *l'ordine di grandezza* di $f(n)$, ignorando le costanti numeriche o i termini di ordine inferiore.
Oltretutto non andremo a quantitifcare un tempo in secondi, ma bensi' il numero di operazioni elementari svolte dall'algoritmo.

0.2.1 Esempio

Consideriamo due algoritmi: A e B. Assumiamo le seguenti tempistiche:

- $f_A(n) = 10^3 n$
- $f_B(n) = 10^{-3} n^2$

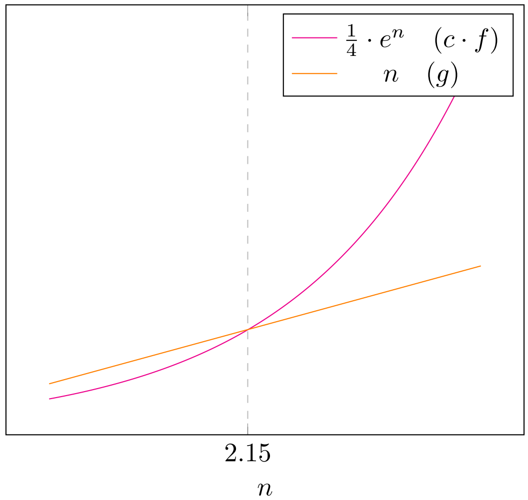
0.3 Notazione asintitoca O (Omicron)

Data una funzione $f(n)$ che quantifica il costo di un algoritmo con input n, usiamo $O(f(n))$ per indicare l'insieme di funzioni $g(n)$ che al limite stanno sempre sotto $f(n)$, ovvero.

$$g(n) \in O(f(n)) \text{ quando } \exists c > 0, n_0 \geq 0. \forall n \geq n_0. \qquad g(n) \leq c \cdot f(n)$$

> Esiste un n_0 dopo il quale la funzione g rimane inferiore rispetto a f. c e' una costante che eventualmente devo applicare a f per renderla *sempre* maggiore di g. Abuso di notazione: $g = O(f(n))$ come $g \in O(f(n))$.

Esempio dove si ha $g(n) \in O(f(n))$, scegliendo $n_0 = 2.15, c = \frac{1}{4}$

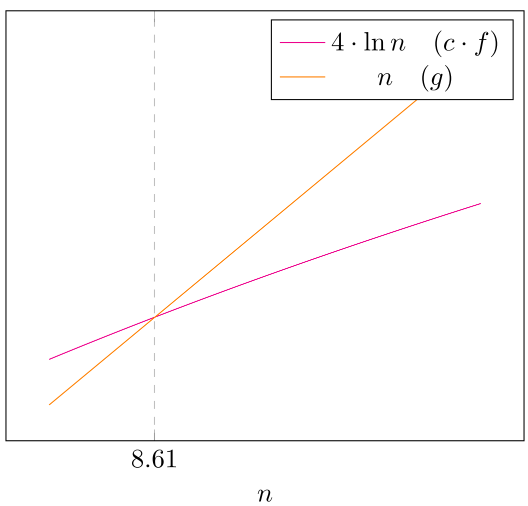


0.4 Operazione asintotica Ω (Omega)

Data una funzione $f(n)$ che quantifica il costo di un algoritmo con input n, usiamo $\Omega(f(n))$ per indicare l'insieme di funzioni $g(n)$ che al limite si stanno sempre sopra $f(n)$, ovvero.

$$g(n) \in \Omega(f(n)) \text{ quando } \exists c > 0, n_0 \geq 0. \forall n \geq n_0. \qquad g(n) \geq c \cdot f(n)$$

Esempio dove si ha $g(n) \in \Omega(f(n))$, scegliendo $n_0 = 8.61, c = \frac{1}{4}$



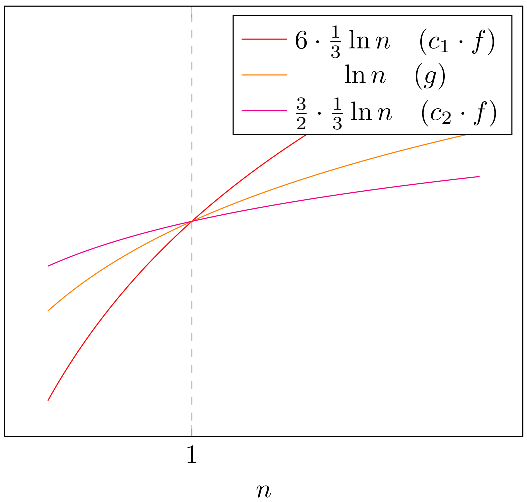
0.5 Operazione asintotica Θ (Theta)

Data una funzione $f(n)$ che quantifica il costo di un algoritmo con input n, usiamo $\Theta(f(n))$ per indicare l'insieme di funzioni $g(n)$ che al limite si comportano come $f(n)$, ovvero.

$$g(n) \in \Theta(f(n)) \text{ quando } \exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 \geq 0. \forall n \geq n_0.$$
$$c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$$

Le funzioni g e f crescono esattamente con lo stesso ordine di grandezza. Ossia due funzioni espresse in polinomi saranno in relazione Θ sse il polinomio di grado maggiore e' lo stesso.

Esempio dove si ha $g(n) \in \Theta(f(n))$, scegliendo $n_0 = 1, c_1 = 6, c_2 = \frac{3}{2}$



0.6 Teoremi

- **simmetria**: $g(n) = \Theta(f(n))$ sse $f(n) = \Theta(g(n))$
- **simmetria trasposta**: $g(n) = O(f(n))$ sse $f(n) = \Omega(g(n))$
- **transitivita'**: $g(n) = O(f(n)) \wedge f(n) = O(h(n))$ allora $g(n) = O(h(n))$. Lo stesso vale per Θ e Ω.

0.7 Tabella degli ordini di grandezza

$O(f(n))$	Ordine	Esempio
$O(1)$	costante	numero pari, somma, moltiplicazione
$O(\log n)$	logaritmico	ricerca binaria (array ordinato)
$O(n)$	lineare	ricerca in un array disordinato
$O(n \log n)$	pseudo-lineare	ordinamento di un array (merge sort)
$O(n^2)$	quadratico	ordinamento di un array (bubble sort)
$O(n^3)$	cubico	prodotto di due matrici $n \times n$
$O(c^n)$	esponenziale, $c > 1$	*subset-sum problem* con forza bruta
$O(n!)$	fattoriale	*commesso viaggiatore* con forza bruta
$O(n^n)$	esponenziale, base n	*n-queens* tramite forza bruta

- **subset-sum**: abbiamo un insieme di numeri, dobbiamo trovare un sottoinsieme al quale, applicando una sommatoria si ottiene un valore desiderato. L'approccio forza bruta considera *ogni sottoinsieme possibile.*
- **commesso viaggiatore**: abbiamo una mappa e delle strade (rappresentate con grafi) e vogliamo trovare il modo migliore per il commesso di viaggiare da A a B. L'approccio forza bruta consiste nel valutare *ogni strada possibile.*
- **n-queens**: problema che ci chiede di porre le regine in una scacchiera $n \times n$ in modo che esse non si mangino a vicenda. L'approccio forza bruta prova *ogni possibile combinazione* di piazzamento in $n \times n$.

0.8 Spiegazione di alcuni ordini di grandezza

- **binary serach**: Andiamo ad analizzare gli elementi dell'array considerando meta' array alla volta, partendo da n elementi, guardando poi $\frac{n}{2}$, poi $\frac{n}{4}$ e cosi' via. Facendo questa procedura si svolgono $\log n$ (dove log e' sempre $\log_2$ in algoritmi). Eccone una spiegazione:

$$\frac{n}{2} \longrightarrow \frac{n}{4} \longrightarrow \frac{n}{8}$$

fino ad arrivare ad avere una frazione che vale 1

$$1 = \frac{n}{2^{\#}}$$
$$2^{\#} = n$$
$$\# = \log_2 n$$

- **merge sort**: Analizziamo gli array a meta' come nelle binary search, e ogni operazione di ordinamento sulle sottoparti richiede $O(\frac{n}{2})$ tempo per svolgere i confronti; Visto che dovremo ordinare entrambe le meta' dell'array, svolgeremo $O(\frac{n}{2}) \cdot 2$ volte l'operazione di ordinamento, ovvero $O(n)$.
  Il che ci da un costo di $O(n) \cdot O(\log n) = O(n \log n)$

0.9 Confronto con limite

Per confrontare l'ordine di grandezza asintotica di due funzioni $g(n)$ e $f(n)$, si puo' svolgere il:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} =$$

- ∞: $g(n) = \Omega(f(n))$ poiche' $g(n)$ ha una crescita superiore
- $k \in \mathbb{R}$: $g(n) = \Theta(f(n))$ poiche' $g(n)$ cresce come $f(n) + k$
- 0: $g(n) = O(f(n))$ poiche' $g(n)$ ha una crescita inferiore