Notazione: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Teorema (dell'unicità del limite):

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Se:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow l \text{ è unico}$$

Teorema (dei due carabinieri):

$f, g, h : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{dove} \quad \mathbb{I}$ è un intorno di x_0

- $\forall x \in \mathbb{I} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

Teorema (degli zeri):

$f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- f *continua* su $[\,a, b\,]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$ (estremi con segno opposto)

Allora:

$$\exists c \in \,]\,a, b\,[\, : \quad f(c) = 0$$

Teorema (di Weierstrass):

$f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- f *continua* su $[\,a, b\,]$

Allora:

$$\exists x_1, x_2 \in \; [\,a, b\,] \; :$$
$$f(x_1) = \min_{[a,b]} f, \quad f(x_2) = \max_{[a,b]} f$$

o meglio:

$$f([a, b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$$

Teorema (di Fermat):

$f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\exists c \in \,]\,a, b\,[$ dove c punto di *max/min* relativo
- f *derivabile* in c

Allora:
$f'(c) = 0$

Teorema (di Rolle):

$f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- f e' *continua* su $[\,a, b\,]$
- f e' *derivabile* in $]\,a, b\,[$
- $f(a) = f(b)$

Allora:
$\exists c \in \,]\,a, b\,[: \quad f'(c) = 0$

Teorema (di Lagrange):

$f : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- f e' *continua* su $[\,a, b\,]$
- f e' *derivabile* in $]\,a, b\,[$

Allora:
$\exists c \in \,]\,a, b\,[: \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Teorema (di Cauchy):

$f, g : [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$

- f, g *continue* su $[\,a, b\,]$
- f, g *derivabili* in $]\,a, b\,[$
- $g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \,]\,a, b\,[$

Allora:
$\exists c \in \,]\,a, b\,[: \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Teorema (di de l'Hopital):

$f, g :]\,a, b\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ dove $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

- f, g *derivabili* su $]\,a, b\,[$
- che valga uno:

  (I) $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0}]$ oppure $[\frac{\infty}{\infty}]$

  (II) $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = [\frac{0}{0}]$ oppure $[\frac{\infty}{\infty}]$

- $g' \neq 0 \quad \forall x \in]\,a, b\,[$

Allora:

(I) $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(II) $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$